Ameisenkolonienalgorithmen für das Problem des Handlungsreisenden

Christian Borgelt

Institut für Wissens- und Sprachverarbeitung
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg

borgelt@iws.cs.uni-magdeburg.de
http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/~borgelt/

Überblick

- **Ameisenkoloniealgorithmen**
  - Schwarm- und populationsbasierte Optimierung, Schwarmintelligenz
  - Das Doppelbrückenexperiment (Wegesuche bei echten Ameisen)
- **Das Problem des Handlungsreisenden**
  - Problemstellung, asymmetrische Verbindungskosten
  - Lösungsansatz mit Zufallsaufstieg (klassische Heuristik)
  - Das Problem lokaler Optima
- **Ansatz mit Ameisenkoloniealgorithmen**
  - Problemdarstellung und Konstruktion von Kandidatenlösungen
  - Aktualisierung der über das Problem gespeicherten Information
  - Mögliche Verbesserungen/Erweiterungen
- **Zusammenfassung**

Schwarm- und populationsbasierte Optimierung

Schwarmintelligenz: (Swarm Intelligence)
Bereich der künstlichen Intelligenz, in dem intelligente Multi-Agenten-Systeme entwickelt werden. Inspiration durch das Verhalten bestimmter Tierarten, speziell

- sozialer Insekten (z.B. Ameisen, Termiten, Bienen etc.) und
- in Schwärmen lebender Tiere (z.B. Fische, Vögel etc.).

Tiere solcher Arten können recht komplexe Aufgaben bewältigen (Finden von Nahrungsquellen, Wegesuche, Nestbau etc.), indem sie zusammenarbeiten.

Wesentliche Ideen:

- Einzelindividuen sind i.a. ziemlich einfach, haben nur begrenzte Fähigkeiten.
- Koordination meist ohne zentrale Steuerung, sondern durch Selbstorganisation.
- Austausch von Informationen zwischen Individuen; Kooperation.

Man kann die Verfahren nach der Art des Informationsaustauschs klassifizieren.

Ameisenkolonieoptimierung

© PeTA http://www.helpingwildlife.com/ants.asp

© NickLyonMedia http://nicklyon.orchardhostings4.co.uk

- Da gefundenes Futter zur Versorgung der Nachkommen zum Nest transportiert werden muß, bilden Ameisen Transportstraßen.
- Dazu markieren sie die Wege zu Futterplätzen mit Duftstoffen (Pheromonen), so daß andere Ameisen der Kolonie diese Futterplätze auch finden können.
- Die Weglängen zu den Futterplätzen werden annähernd minimiert.

Ameisenkolonieoptimierung

Ant Colony Optimization [Dorigo *et al.* 1996, Dorigo and Gambardella 1997]

- **Motivation:** Ameisen einiger Arten finden kürzeste Wege zu Futterquellen durch Legen und Verfolgen von Pheromonmarkierungen („Duftmarken“).
  - Intuitiv: Kürzere Wege erhalten in gleicher Zeit mehr Pheromon.
  - Wege werden zufällig nach der vorhandenen Pheromonmenge gewählt.
    (Es ist um so wahrscheinlicher, daß ein Weg gewählt wird,
    je mehr Pheromon sich auf dem Weg befindet.)
  - Die Menge des ausgebrachten Pheromons kann von der Qualität und der Menge des gefundenen Futters abhängen.

- **Grundprinzip: Stigmergie** (stigmergy)
  Zur Wegesuche kommunizieren Ameisen indirekt über Pheromonablagerungen.

  Stigmergie (indirekte Kommunikation durch Veränderung der Umgebung) ermöglicht global angepaßtes Verhalten auf Grund lokaler Informationen.

Ameisenkolonieoptimierung

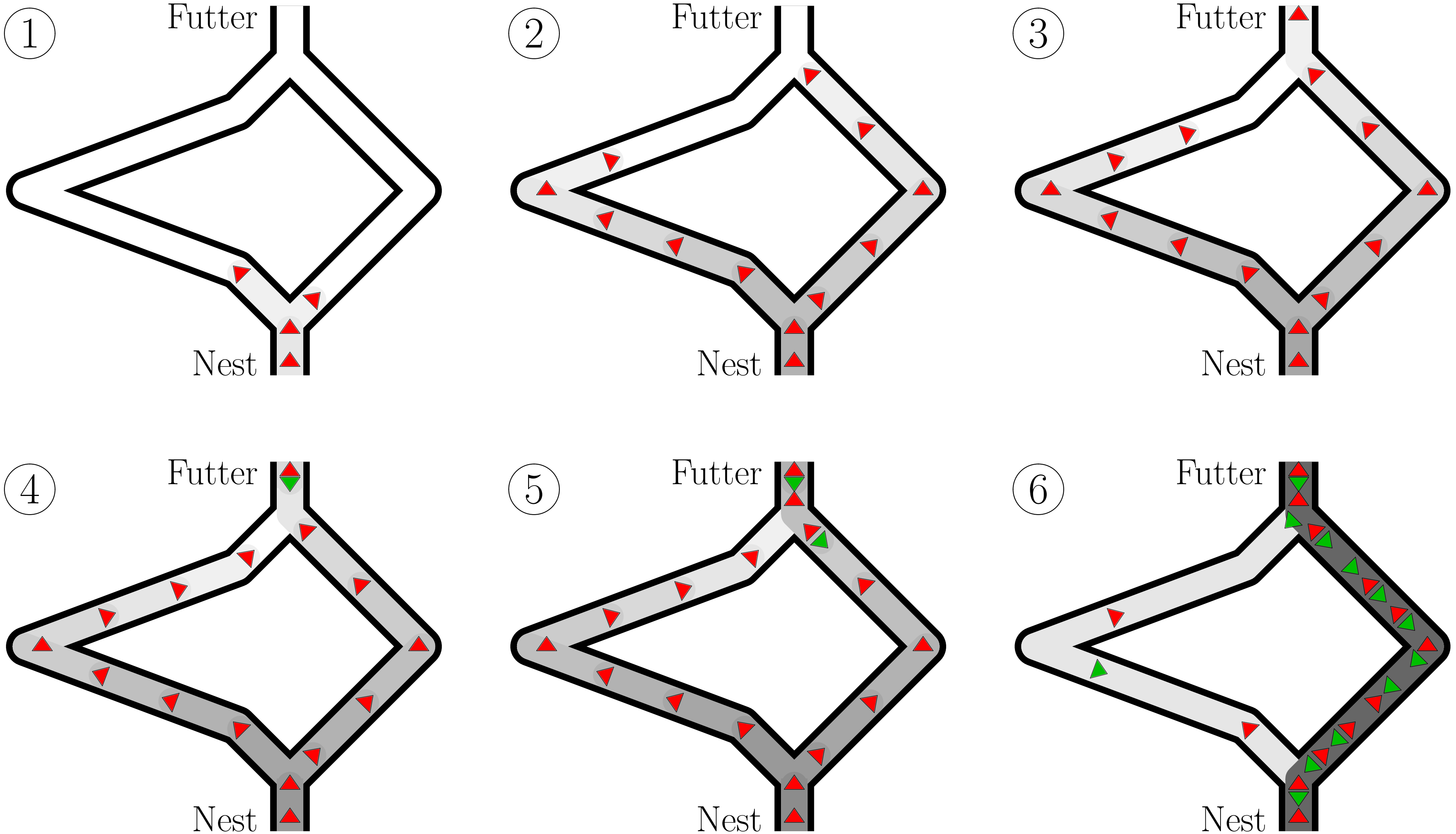
Doppelbrückenexperiment [Goss *et al.* 1989]

- Ameisennest und Futterquelle werden durch eine Doppelbrücke verbunden.
  Die beiden Zweige der Brücke sind verschieden lang.
- Experiment mit der argentinischen Ameise *Iridomyrmex Humilis*.
  Diese Ameisenart ist (wie fast alle anderen auch) fast blind.
  (Die Ameisen können also nicht sehen, welches der kürzere Weg ist.)
- In den meisten Versuchen benutzten schon nach wenigen Minuten
  fast alle Ameisen den kürzeren Weg.

Erklärung

- Auf dem kürzeren Weg erreichen die Ameisen das Futter schneller.
  Das Ende des kürzeren Weges erhält daher (am Anfang) mehr Pheromon.
- Auf dem Rückweg wird wegen der entstandenen Pheromondifferenz
  mit höherer Wahrscheinlichkeit der kürzere Weg gewählt.
  Dies führt zu einer Verstärkung der Pheromondifferenz.

Doppelbrückenexperiment



Doppelbrückenexperiment

- **Prinzip:** Der kürzere Weg wird systematisch verstärkt (Autokatalyse):

  mehr Pheromon auf Weg $\rightleftarrows$ mehr Ameisen wählen Weg

- **Beachte:** Der kürzere Weg wird nur gefunden, weil die Ameisen sowohl auf dem Hin- als auch auf dem Rückweg Pheromon ablegen.

- Wird z.B. nur auf dem Hinweg Pheromon abgelegt:
  - Auf dem Hinweg zur Futterquelle kann keiner der beiden Wege bevorzugt werden, da keine Pheromondifferenz vorliegt oder systematisch entsteht.
  - Am Vereinigungspunkt der Brücken verringert sich das Verhältnis der Pheromonmengen im Laufe der Zeit und verschwindet schließlich nahezu.
  - Durch zufällige Fluktuationen in der Wegewahl konvergiert die Wegesuche ggf. dennoch zufällig(!) auf einen der beiden Brückenzweige.

- Analoge Argumente (symmetrische Situation) können angewandt werden, wenn Pheromon nur auf dem Rückweg abgelegt wird.

Doppelbrückenexperiment

- **Beachte:** Der kürzere Weg wird gefunden, weil schon zu Beginn beide Zweige der Brücke zur Verfügung stehen und auf beiden kein Pheromon liegt.

  Das Ende des kürzeren Weges wird früher von mehr Ameisen erreicht.
  Dies führt zu unterschiedlichen Mengen an Pheromon auf den beiden Wegen, was zu einen sich selbst verstärkenden Prozeß führt.

- **Fragen:** Was passiert, wenn durch Veränderung der Umgebung ein neuer Weg möglich wird, der kürzer ist als der bisherige?
  Wird auf diesen kürzeren Weg gewechselt?

- **Antwort:** *Nein!* [Goss *et al.* 1989]
  Ist erst einmal ein Weg etabliert, so wird dieser beibehalten.

- Nachweis durch zweites Brückenexperiment, in dem am Anfang nur der längere Brückenzweig zur Verfügung steht und der kürzere später hinzugefügt wird.

  Die Mehrheit der Ameisen benutzen weiter den längeren Weg.
  Nur in seltenen Fällen wird auf den kürzeren Weg gewechselt.

Das Problem des Handlungsreisenden

- **Gegeben:**
  - Eine Menge von n Städten (als Punkte in einer Ebene)
  - Abstände/Kosten der Wege zwischen den Städten (müssen nicht dem euklidischen Abstand entsprechen, können eventuell sogar asymmetrisch sein)
- **Gesucht:**
  - Rundreise minimaler Länge/Kosten durch alle n Städte, auf der keine Stadt mehr als einmal besucht wird
- **Mathematisch:** Suche eines Hamiltonkreises (enthält jeden Knoten genau einmal) mit minimalem Gewicht in einem Graphen mit gewichteten Kanten.
- **Bekannt:** Dieses Problem ist NP-vollständig, d.h., man kennt keinen Algorithmus, der dieses Problem in polynomialer Zeit löst.
- **Daher:** Für großes n ist in annehmbarer Zeit nur eine Näherungslösung berechenbar (die beste Lösung kann gefunden werden, dies ist aber nicht garantiert).

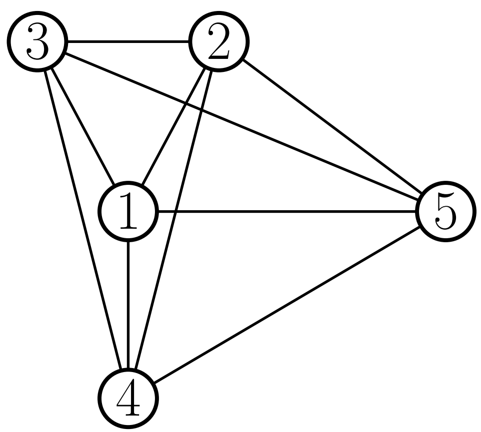
Das Problem des Handlungsreisenden

Formale Darstellung des Problems

- Darstellung des Problems durch eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{D} = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.
  n ist die Anzahl der Städte und d_{ij} der Abstand der Städte i und j.
  (Beachte: $\mathbf{D}$ kann asymmetrisch sein, aber $\forall i; 1 \le i \le n : d_{ii} = 0$.)

- Lösung: Eine Permutation π der Städte (Rundreise), so daß

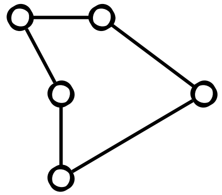
$$\sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i)\pi((i \bmod n)+1)} = \min .$$



d	1	2	3	4	5
1	0	34	34	33	56
2	34	0	32	65	50
3	34	32	0	65	78
4	33	65	65	0	65
5	56	50	78	65	0

Lösung (Länge 214):

i:	1	2	3	4	5
$\pi(i)$:	4	5	2	3	1



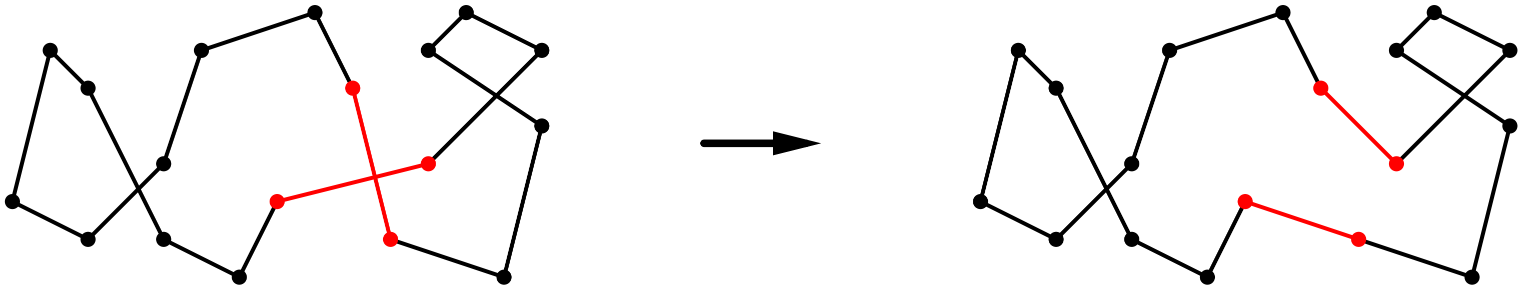
Asymmetrische Verbindungskosten

- Einbahnstraßen können die Kosten asymmetrisch machen.
- Man kennt nur wenige brauchbare Verfahren für asymmetrische Kosten.

Das Problem des Handlungsreisenden

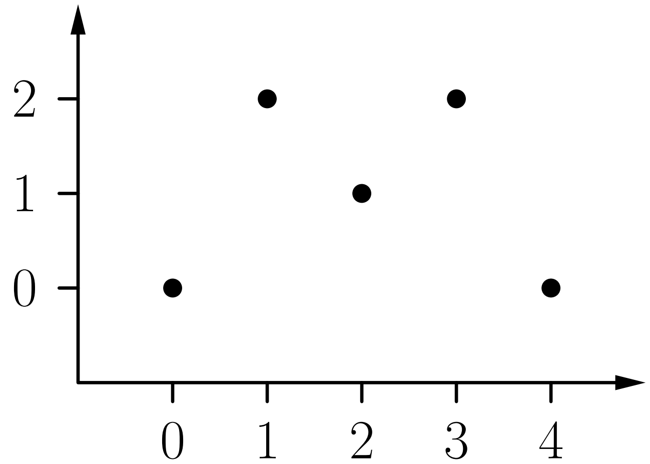
Betrachte Ansatz mit Zufallsaufstieg/lokaler Verbesserung

1. Bringe die Städte in eine zufällige Reihenfolge (zufällige Rundreise).
2. Wähle zufällig zweimal zwei Städte, die in der aktuellen Rundreise aufeinander folgen (alle vier Städte verschieden). Trenne die Rundreise zwischen den Städten jedes Paares auf und drehe den dazwischenliegenden Teil um.
3. Wenn die so entstehende Rundreise besser (kürzer, billiger) ist als die alte, ersetze die alte Rundreise durch die neue.
4. Wiederhole die Schritte 2 und 3, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

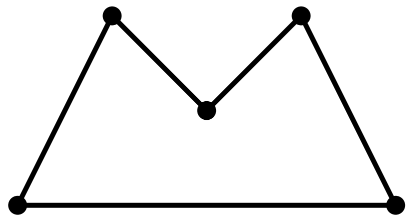


Das Problem des Handlungsreisenden

- Lokale Verbesserung kann in einem lokalen Minimum hängenbleiben.
  Dazu ein einfaches Beispiel mit 5 Städten:

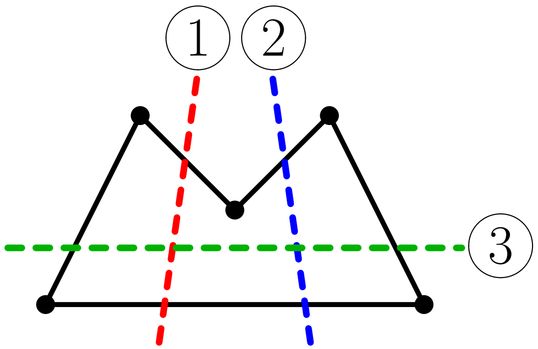


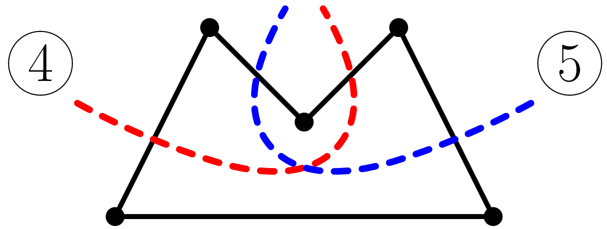
anfängliche Rundreise



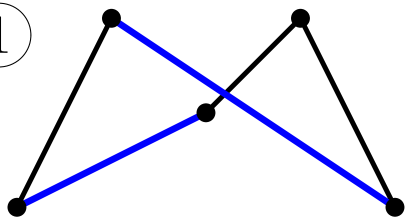
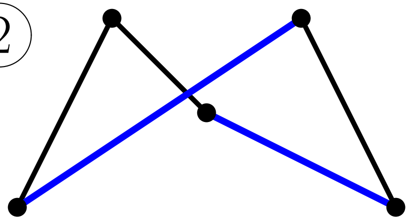
Länge: $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 4 \approx 11.30$

mögliche Teilungen der Rundreise

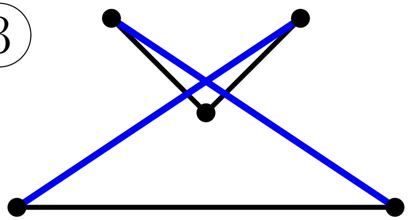




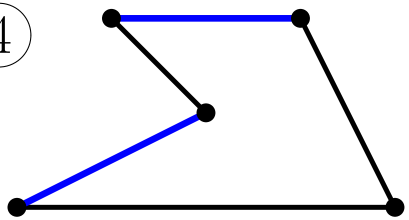
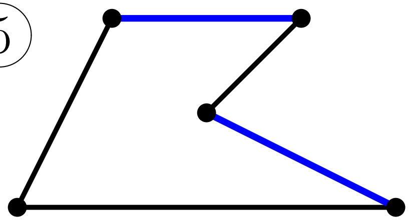
Das Problem des Handlungsreisenden

1

2


Länge: $\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + \sqrt{13} \approx 11.73$

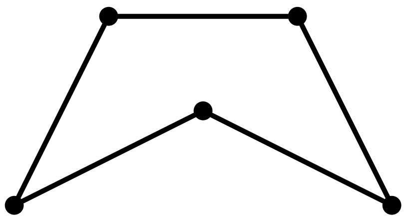
3


Länge: $\sqrt{2} + 2\sqrt{13} + 4 \approx 14.04$

4

5


Länge: $\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2 + 4 \approx 11.89$

Beste Rundreise:
(globales Optimum)



Länge: $4\sqrt{5} + 2 \approx 10.94$

Das Problem des Handlungsreisenden

- Alle Modifikationen der Anfangsrundreise führen zu Rundreisen, die schlechter sind. Das globale Optimum kann daher, ausgehend von dieser Rundreise, mit rein lokalen Verbesserungen nicht gefunden werden.

- **Beachte:** Es kann von der betrachteten Menge an Operationen (definieren die Umgebung/Nachbarschaft einer Rundreise) abhängen, ob die Suche in einem lokalen Optimum hängenbleiben kann:

  Läßt man als weitere Operation zu, daß die Position einer Stadt in der Rundreise geändert wird (Entfernen von der aktuellen Position und Einfügen an einer anderen), so tritt im betrachteten Beispiel kein Hängenbleiben mehr auf.

  Auch für diese Operationenmenge/Nachbarschaft läßt sich jedoch ein Beispiel konstruieren, in dem die Suche in einem lokalen Minimum hängenbleibt.

- **Extremfall:** Erlaube als Operation eine beliebige Umordnung der Städte. Kein lokales Optimum mehr (da jede Rundreise erzeugt werden kann), aber dafür gibt es „zu viele“ mögliche Modifikationen einer Rundreise.

Klassische Optimierungsverfahren: Probleme

- Viele klassische Optimierungsheuristiken suchen im wesentlichen **lokal**:
  - Es wird stets nur ein aktueller Lösungskandidat betrachtet.
  - Der aktuelle Lösungskandidat wird nur geringfügig verändert.

- **Nachteil:** Es wird u.U. nur ein kleiner Teil des Suchraums betrachtet.
  Es besteht die Gefahr des Hängenbleibens in lokalen Optima.

- **Abhilfe:** Mehrere Läufe des Verfahrens mit verschiedenen Startpunkten.
  Nachteil: Keine Informationsübertragung von einem Lauf zum nächsten.

- Beachte: Große Veränderungen des Lösungskandidaten, bis hin zu völliger Neuberechnung, sind nicht sinnvoll, da dann zu wenig/keine Information von einem Lösungskandidaten zum nächsten weitergegeben wird.

$\Rightarrow$ **Wichtig sind:**
  - großräumige Abdeckung des Suchraums (Exploration)
  - Zusammenhang der erzeugten Lösungskandidaten
  - Informationsaustausch zwischen parallelen Prozessen

Ameisenkolonieoptimierung

Anwendung auf das Problem des Handlungsreisenden

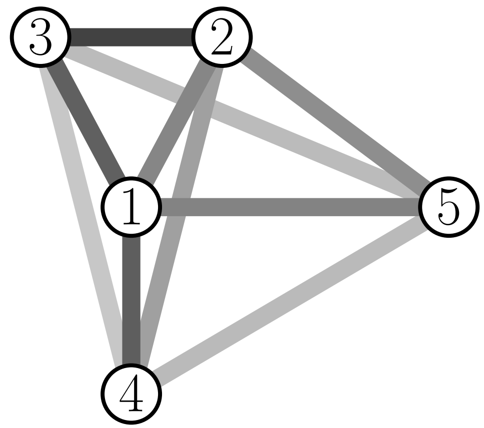
- Darstellung der Pheromoninformation als $n \times n$ Matrix $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

  Ein Pheromonwert ϕ_{ij}, $i \neq j$, gibt an, wie wünschenswert es ist, die Stadt j direkt nach der Stadt i zu besuchen. (ϕ_{ii} wird nicht benötigt.)

  Die Matrix muß nicht notwendig symmetrisch sein/gehalten werden.

- Alle Matrixelemente ϕ_{ij} werden mit dem gleichen kleinen Wert initialisiert. (Am Anfang liegt auf allen Kanten die gleiche Menge Pheromon.)

ϕ	1	2	3	4	5
1	0	53	38	37	52
2	53	0	26	63	56
3	38	26	0	78	74
4	37	63	78	0	73
5	52	56	74	73	0



Konstruktion von Lösungskandidaten

Jede Ameise hat als „Gedächtnis“ eine Menge C, die die Indizes der noch nicht besuchten Städte enthält. Jede besuchte Stadt wird aus dieser Menge entfernt.

(Dieses Gedächtnis gibt es im biologischen Vorbild nicht!)

1. Eine Ameise wird in eine zufällig bestimmte Stadt gesetzt.
   Diese Stadt ist der Anfang der Rundreise.

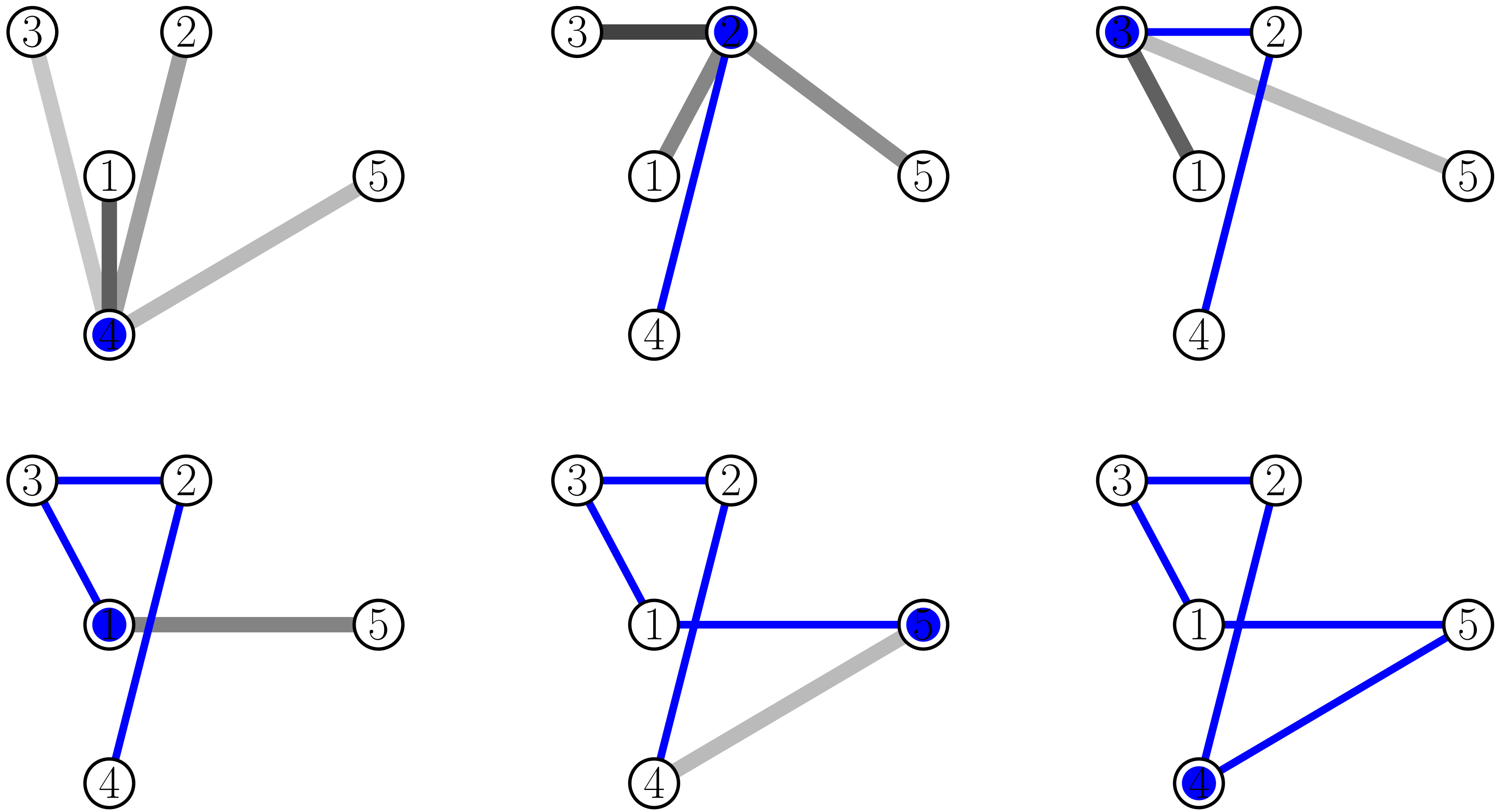
2. Die Ameise wählt eine noch nicht besuchte Stadt und begibt sich in diese.
   In Stadt i wählt die Ameise die (unbesuchte) Stadt j mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\sum_{k \in C} \phi_{ik}},$$

   wobei C die Menge der Indizes der noch nicht besuchten Städte ist und
   ϕ_{ij} die Menge an Pheromon auf der Verbindung von Stadt i nach Stadt j.

3. Wiederhole Schritt 2, bis alle Städte besucht wurden.

Konstruktion von Lösungskandidaten



- In jedem Schritt wird die nächste Kante zufällig nach Pheromonmenge gewählt.

Pheromonaktualisierung

1. **Verdunstung/Evaporation**
   Alle Pheromonwerte werden um einen Bruchteil η (evaporation) verringert:

$$\forall i, j; 1 \leq i, j \leq n : \quad \phi_{ij} \; := \; \phi_{ij} - \eta\phi_{ij} \; = \; (1 - \eta) \cdot \phi_{ij}$$

2. **Verstärkung konstruierter Lösungen**
   Die Kanten der konstruierten Lösungen werden mit einer zusätzlichen Menge an Pheromon belegt, die der Lösungsqualität entspricht.

$$\forall \pi \in \Pi_t : \quad \phi_{\pi(i)\pi((i \bmod n)+1)} \; := \; \phi_{\pi(i)\pi((i \bmod n)+1)} + Q(\pi)$$

   Π_t ist die Menge der im Schritt t konstruierten Rundreisen (Permutationen). Als Qualitätsfunktion kann man z.B. die inverse Reiselänge verwenden:

$$Q(\pi) \; = \; c \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i)\pi((i \bmod n)+1)} \right)^{-1}$$

   Anschaulich: Je besser die Lösung, um so mehr Pheromon erhalten die Kanten.

Problem des Handlungsreisenden: Pseudocode

```
procedure aco_tsp;                         (* ant colony optimization for *)
                                           (* the traveling salesman problem *)
initialize pheromone;                      (* initialisiere alle Matrixelemente φ_ij, *)
repeat                                     (* 1 ≤ i, j ≤ n, auf einen kleinen Wert ε *)
  for each ant do                          (* konstruiere Kandidatenlösungen *)
    C := {1, ..., n};                      (* Menge der zu besuchenden Städte *)
    choose i ∈ C;                          (* wähle die Anfangsstadt und *)
    C := C − {i};                          (* entferne sie aus den unbesuchten Städten *)
    while C ≠ ∅ do begin                   (* solange nicht alle Städte besucht wurden *)
      choose j ∈ C with probability p_ij;
      C := C − {i};                        (* wähle die nächste Stadt der Reise, *)
      i := j;                              (* entferne sie aus den unbesuchten Städten, *)
    end;                                   (* und gehe in die ausgewählte Stadt *)
  endfor;
  update pheromone;                        (* aktualisiere Matrix Φ nach Lösungsgüten *)
until stopping criterion is met;
```

Erweiterungen

- **Bevorzuge nahe Städte** (analog zur Nächster-Nachbar-Heuristik)
  Gehe von Stadt i zu Stadt j mit der Wahrscheinlichkeit

  $$p_{ij} = \frac{\phi_{ij}^{\alpha}\,\tau_{ij}^{\beta}}{\sum_{k \in C} \phi_{ik}^{\alpha}\,\tau_{ik}^{\beta}},$$

  wobei C die Menge der Indizes der unbesuchten Städte und $\tau_{ij} = d_{ij}^{-1}$ ist.

- **Tendiere zur Wahl der besten Kante** (greedy)
  Mit Wahrscheinlichkeit p_{exploit} gehe von der Stadt i zur Stadt j_{best} mit

  $$j_{\text{best}} = \operatorname{argmax}_{j \in C}\, \phi_{ij} \qquad \text{bzw.} \qquad j_{\text{best}} = \operatorname{argmax}_{j \in C}\, \phi_{ij}^{\alpha}\,\tau_{ij}^{\beta},$$

  und benutze Wahrscheinlichkeiten p_{ij} mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_{\text{exploit}}$.

- **Verstärke beste bekannte Rundreise** (elitist)
  Lege zusätzliches Pheromon auf der besten bisher bekannten Rundreise ab.
  Kann z.B. als Bruchteil Ameisen angegeben werden, die sie zusätzlich ablaufen.

Erweiterungen

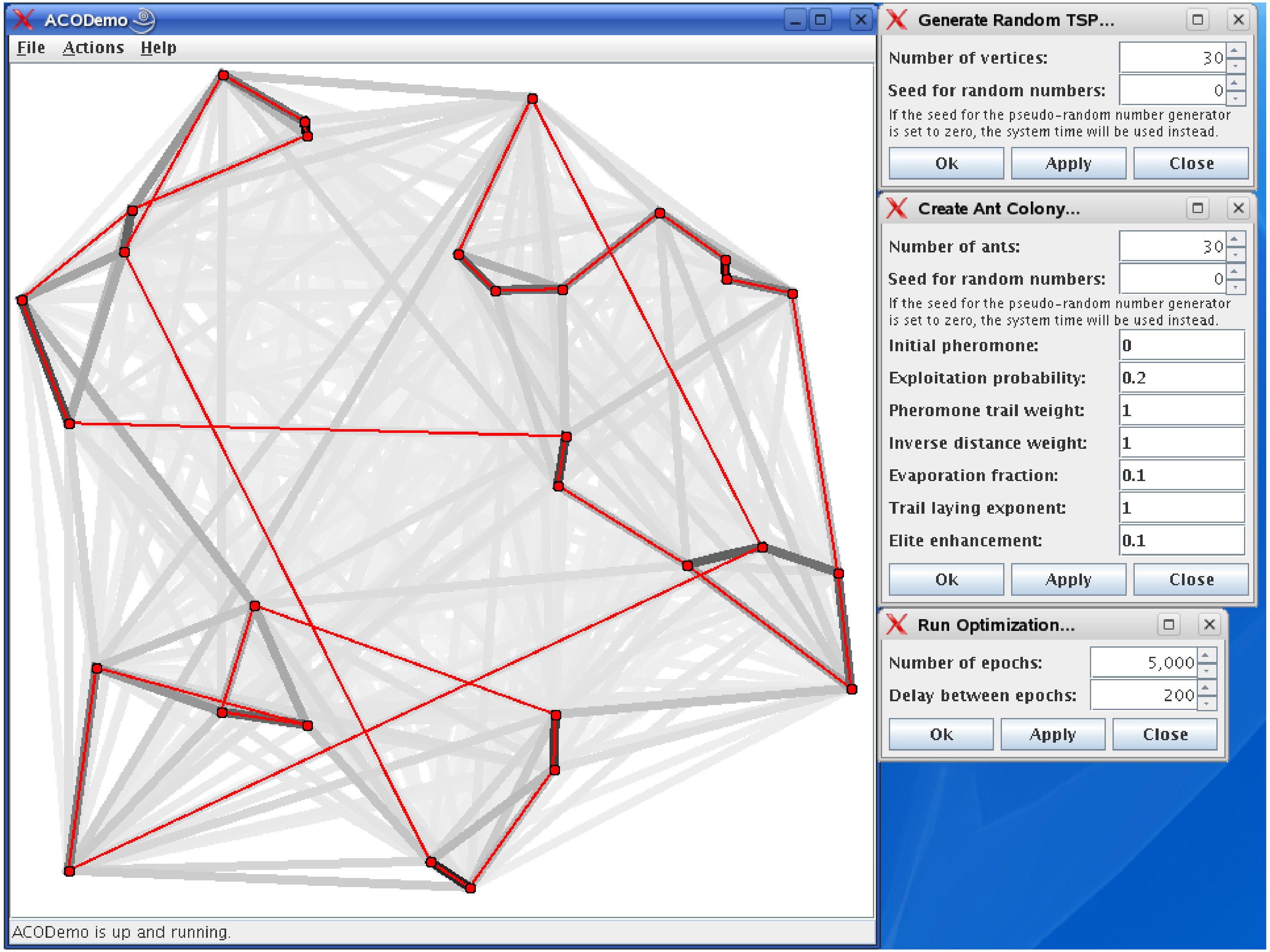
- Verknüpfung mit **lokaler Lösungsverbesserung** ist oft vorteilhaft:

  Vor der Pheromonaktualisierung wird eine erzeugte Rundreise lokal optimiert, indem einfache Modifikationen auf Verbesserung überprüft werden.

- Lokale Optimierungsansätze können z.B. folgende Operationen benutzen:
  - **Rekombination nach Entfernen von zwei Kanten** (2-opt)
    entspricht dem „Umdrehen“ einer Teil-Rundreisen
  - **Rekombination nach Entfernen von drei Kanten** (3-opt)
    entspricht dem „Umdrehen“ und/oder Vertauschen zweier Teil-Rundreisen
  - **Eingeschränkte Rekombination** (2.5-opt)
  - **Austausch benachbarter Städte**
  - **Permutation benachbarter Triplets**

- „Teure“ lokale Optimierungen sollten nur auf die beste gefundene Lösung oder die in einer Iteration beste Lösung angewandt werden.

Ameisenkolonieoptimierung: Demonstration



Allgemeine Ameisenkolonieoptimierung

- **Voraussetzungen**
  - Es handelt sich um ein kombinatorisches Optimierungsproblem.
  - Es gibt eine konstruktive Methode, um Lösungskandidaten zu erzeugen.
- **Vorgehen:** Lösungen werden mit Hilfe einer Folge von Zufallsentscheidungen konstruiert, wobei jede Entscheidung eine Teillösung erweitert.
- Die Entscheidungsfolge kann als Pfad in einem Entscheidungsgraphen (auch: Konstruktionsgraphen) gesehen werden.
- Die Ameisen sollen Pfade durch den Entscheidungsgraphen erkunden und den besten (kürzesten, billigsten) Weg finden.
- Die Ameisen markieren die benutzten Kanten des Graphen mit Pheromon. Dadurch werden andere Ameisen zu guten Lösungen geleitet.
- Pheromon verdunstet in jeder Iteration, damit einmal ausgebrachtes Pheromon das System nicht zu lange beeinflußt („Vergessen“ veralteter Information).

Zusammenfassung

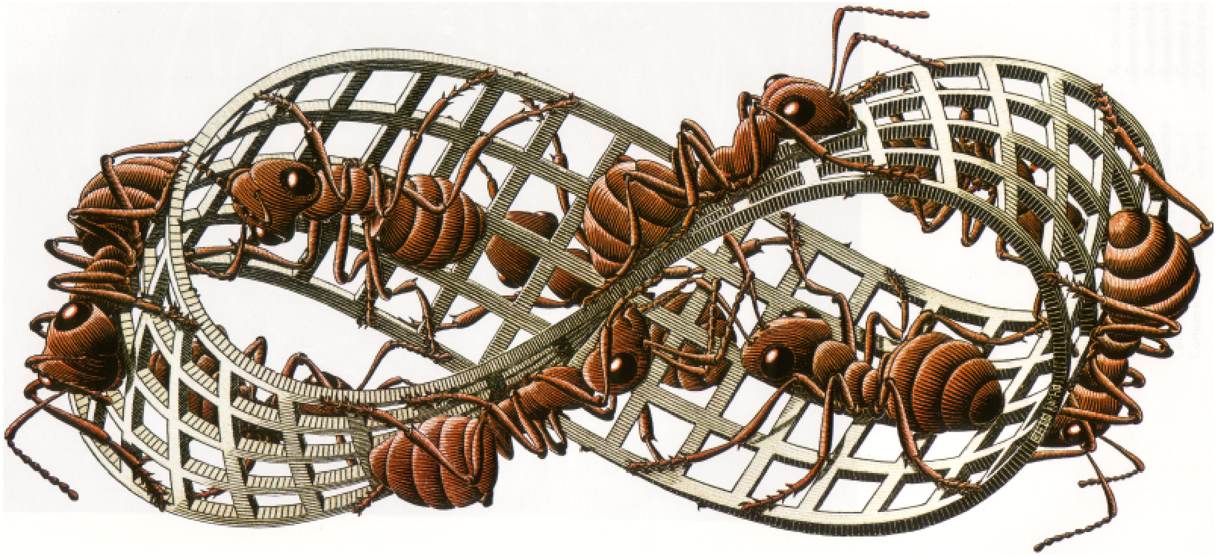
- Schwarm- und populationsbasierte Algorithmen sind
  Heuristiken zur Lösung von Optimierungsproblemen.
  Es geht darum, gute Näherungslösungen zu finden.
- Man versucht das **Problem der lokalen Optima** zu verringern
  (durch bessere Durchforstung/Exploration des Suchraums).
- Wichtig ist der **Informationsaustausch** zwischen den Individuen.
  Je nach Prinzip können verschiedene Algorithmentypen unterschieden werden.
- **Ameisenkolonieoptimierung:**
  - Suche nach besten Wegen (abstrakt: in einem Entscheidungsgraphen).
  - Informationsaustausch durch Veränderung der Umgebung (Stigmergie).
- **Aktuelle Forschungsthemen in diesem Bereich:**
  - Ameisenkoloniealgorithmen für stetige Optimierungsprobleme
  - Anwendung dieser und Entwicklung weiterer Metaheuristiken

Demonstrationsprogramme

Das vorgeführte Demonstrationsprogramm ist verfügbar unter der URL:

- **Ameisenkolonieoptimierung** (ant colony optimization)

  `http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/~borgelt/acopt.html`



- **Teilchenschwarmoptimierung** (particle swarm optimization)

  `http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/~borgelt/psopt.html`