

5. Übungsblatt

Aufgabe 19 Funktionsapproximation

- Geben Sie ein mehrschichtiges Perzeptron mit ca. 10 Neuronen an, das die Funktion $y = x^2$ im Intervall $[0.5, 4.5]$ durch eine Treppenfunktion annähert! Beachten Sie, daß es (mindestens) zwei Möglichkeiten gibt: eine, die zwei versteckte Schichten, und eine, die nur eine versteckte Schicht verwendet.
- Wie kann man diese Näherung verbessern? (Geben Sie zwei Möglichkeiten an.)

Aufgabe 20 Funktionsapproximation

- Wir betrachten die Indikatorfunktion der rationalen Zahlen über der Menge der reellen Zahlen (auch als Dirichlet-Funktion bekannt), d.h. die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kann diese Funktion durch ein neuronales Netz (mehrschichtiges Perzeptron) beliebig genau angenähert werden (der Einfachheit halber: im Intervall $[-1, 1]$)?

- Wir betrachten die einfache Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-1}.$$

Kann diese Funktion durch ein neuronales Netz (mehrschichtiges Perzeptron) beliebig genau angenähert werden (der Einfachheit halber: im Intervall $[-1, 1]$)?

- Was zeigt das Ergebnis der Teilaufgaben a) und b) über die Berechnungsfähigkeiten neuronaler Netze (mehrschichtiger Perzeptren)?

Aufgabe 21 Gradientenabstieg

Nähern Sie das Minimum der Funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_2$ mit Hilfe des Gradientenabstiegs an! Verwenden Sie als Anfangsnäherung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ und als Schrittweitenparameter $\eta = 0.2$!

Aufgabe 22 Gradientenabstieg

In Aufgabe 15a haben wir die Anpassung einer Gerade $y = a + bx$ an die Datenpunkte $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ betrachtet. Dort haben wir die analytische Lösung über das Aufstellen und Lösen des Systems der Normalgleichungen benutzt. In dieser Aufgabe wollen wir das gleiche Problem mit Hilfe eines Gradientenabstiegs lösen.

- Was ist die Fehlerfunktion für diese Aufgabe?
- Was ist die Aktualisierungsregel für den Gradientenabstieg für diese Aufgabe?
- Berechnen Sie einige Aktualisierungsschritte ausgehend von $a = b = 0$! Probieren Sie verschiedene Schrittweitenparameter, z.B. aus der Folge 0.001, 0.003, 0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1, 3 etc.!